I. Минимизация ДНФ и связанные с ней задачи. (1)

Грань – множество $B^{n;\,i_1,\dots i_r}_{b_1,\dots,b_r} = \{\beta = (\beta_1, \dots \beta_n) : \beta_{i_1} = b_1, \dots \beta_{i_r} = b_r\}$

r фиксированных переменных $\Rightarrow$ ранг r

$n-r$ свободных переменных $\Rightarrow$ размерность $n-r$

Грань можно задать точечным набором $\gamma = (2, \dots 2, \underset{i_1}{b_1}, 2, \dots 2, \underset{i_r}{b_r}, 2 \dots 2)$ обозн. Γ_γ

Граней фиксированного ранга $C_n^r \cdot 2^r$, всего граней – 3^n.

ФАЛ – отображение $f(\vec{x}) : B^n(X) \mapsto B$, где $B^n(X)$ – единичный куб, отвечающий набору переменных $X \subset \mathcal{X} = \{x_1, x_2, \dots\}$.

Мн-во всех ФАЛ от переменных X обозначается $P_2(X)$.

Мн-во всех ФАЛ от первых n переменных обозначается $P_2(n)$.

$|P_2(n)| = 2^{2^n}$

ФАЛ $f(\vec{x})$ существенно зависит от x_i, если $\exists\, \alpha, \beta \in B^n$: $f(\alpha) \neq f(\beta)$.

$\alpha = (\alpha_1, \dots \alpha_{i-1}, 0, \alpha_{i+1}, \dots \alpha_n)$ и $\beta = (\alpha_1, \dots \alpha_{i-1}, 1, \alpha_{i+1}, \dots \alpha_n)$:

иначе переменная наз-ся фиктивной.

Равенство ФАЛ понимается с точностью до добавления/изъятия фиктивных переменных. Хар. мн-во $N_f = f^{-1}(1)$.

ДНФ.

1) Введём единую запись для $x_i, \bar{x}_i$: буквы переменной x_i

$x_i^b = \begin{cases} x_i, & b = 1 \\ \bar{x}_i, & b = 0 \end{cases}$. Тогда $x_i^b = 1 \iff x_i = b$

2) Введём элементарную конъюнкцию

$K = x_{i_1}^{b_1} \cdot \ldots \cdot x_{i_r}^{b_r}$, где $1 \le i_1 < \ldots < i_r \le n$; $b_1, \dots b_r \in \{0, 1\}$

число $r = R(K)$ наз-ся рангом ЭК.

3) Введём дизъюнктивную нормальную форму

$\mathfrak{A} = K_1 \vee \ldots \vee K_s$, где K_i – различные ЭК от $X(n)$?

число $R(\mathfrak{A}) = \sum\limits_{i=1}^{s} R(K_i)$ наз-ся рангом ДНФ.

число $\lambda(\mathfrak{A}) = s$ наз-ся длиной ДНФ.

Характеристическое мн-во ЭК $K = x_{i_1}^{b_1} \dots x_{i_r}^{b_r}$ – грань $B^{n, i_1, \dots i_r}_{b_1, \dots b_r}$

Характеристическое мн-во ДНФ $\mathfrak{A}$ – $N_{K_1} \cup \ldots \cup N_{K_s}$.

Совершенная ДНФ. $\forall$ ФАЛ $f \neq 0$ $\exists$ совершенная ДНФ – такая, что все её ЭК существ-но зависят от одних и тех же переменных и имеют ранг n, равный числу переменных (и размерность 0, т.е. геометрически это объединение точек)

$$f(x_1, \dots x_n) = \bigvee_{(b_1, \dots, b_n) \in N_f} x_1^{b_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{b_n}.$$

$\boxed{\text{Утверждение 1.1}}$ Совершенная ДНФ явл-ся единственной ДНФ для ФАЛ $f \iff$ в N_f нет соседних наборов.

Вес набора: $\|\beta\| = \sum\limits_{i=1}^{n} \beta_i$. Соседние наборы: $\alpha, \beta \in B^n$: $\|\alpha \oplus \beta\| = 1$.

КНФ определяется аналогично ДНФ. $\mathcal{B} = J_1 \cdot J_2 \cdot \ldots \cdot J_s$ ②

$\mathcal{B} = f \iff \overline{N}_f = \overline{N}_{J_1} \cup \ldots \cup \overline{N}_{J_s}$ или $N_f = N_{J_1} \cap \ldots \cap N_{J_s}$

а $\overline{N}_J = B^{n;\, i_1, \ldots i_r}_{\sigma_1, \ldots \sigma_r}$. Для любой $f \in P_2(n)$, $f \neq 1$

$$\mathcal{B}_f = \bigwedge_{(\sigma_1, \ldots \sigma_n) \in \overline{N}_f} \left(x_1^{\overline{\sigma}_1} \vee \ldots \vee x_n^{\overline{\sigma}_n} \right)$$

Сокращённая ДНФ

f_1 импликирует $f_2 \iff f_2$ поглощает $f_1 \iff N_{f_1} \subseteq N_{f_2} \iff$

$[f_1 \to f_2] = 1 \iff f_1 = f_1 f_2 \iff f_2 = f_2 \vee f_1 \iff$

$f_1 \leq f_2$.

Любая ЭК, импликирующая f – __импликанта__ f $(N_K \subseteq N_f)$

__Простая импликанта__ – ЭК K т.ч. $\nexists$ ЭК $K_1 : N_K \subset N_{K_1} \subseteq N_f$

(т.е. K – максимальная грань функции f.)

__Сокращённая ДНФ__ – дизъюнкция __всех__ простых импликант

(или покрытие N_f __всеми__ макс. гранями f)

$\boxed{\text{Утверждение 2.1}}$ Пусть $\mathfrak{A}' = f_1$, $\mathfrak{A}'' = f_2$ – сокр. ДНФ.

Тогда ДНФ $\mathfrak{A}$ без поглощений ЭК, получающаяся из формулы $\mathfrak{A}' \cdot \mathfrak{A}''$ после раскрытия всех скобок и всех поглощений, явл-ся сокр. ДНФ для $f_1 \cdot f_2$.

__Следствие__: если раскрыть скобки и провести поглощения в любой КНФ, получим сокр. ДНФ

◁ Не простых импликант в $\mathfrak{A}$ нет, т.к. они поглощаются простыми.

Пусть K – $\forall$ пр. импликанта f. $\Rightarrow K$ импликанта f_1, f_2, т.к. $f = f_1 f_2 \Rightarrow$

$\exists K'$ – пр. импл. $f_1 : \{K'\} \subseteq \{K\}$ и $\exists K''$ – пр. импл. $f_2 : \{K''\} \subseteq \{K\}$.

$\mathfrak{A}' = K' \vee \ldots$, $\mathfrak{A}'' = K'' \vee \ldots \Rightarrow \mathfrak{A}'\mathfrak{A}'' = \underbrace{K' \cdot K''}_{\text{импликанта } f} \vee \ldots$

$\underbrace{\{K' \cdot K''\}}_{\text{импликанта}} = \{K'\} \cup \{K''\} \subseteq \underbrace{\{K\}}_{\text{простая импликанта}} \Rightarrow K' \cdot K'' = K \Rightarrow K$ входит в $\mathfrak{A}$. ▷

Тождество обобщенного склеивания t^{oc}: $\overline{x}_1 x_2 \vee x_1 x_3 = \overline{x}_1 x_2 \vee x_1 x_3 \vee x_2 x_3$

$\mathfrak{A} = \overline{x}_i K' \vee x_i K'' \vee \widetilde{\mathfrak{A}} \xmapsto{t^{oc}} \overline{x}_i K' \vee x_i K'' \vee K'K'' \vee \widetilde{\mathfrak{A}} = \mathfrak{A}'$

$\mathfrak{A}'$ – __расширение__ $\mathfrak{A}$. (__Строгое расширение__, если $K'K''$ не поглощается)

$\boxed{\text{Утверждение 2.2}}$ ДНФ без поглощений ЭК явл. сокр. ДНФ $\iff$ она не имеет строгих расширений.

__Следствие__: из $\forall$ ДНФ можно получить сокр. ДНФ, строя послед-ные строгие расшир. и проводя поглощения

◁ Достаточно д-ть, что такая ДНФ содержит все простые импликанты. От противного: пусть $\exists$ ЭК K – ПИ для $f : K \notin \mathfrak{A}$. Р-м $\mathcal{K}$ – мн-во всех импликант f: они не явл-ся импликантами ЭК из $\mathfrak{A}$. 1) $K \in \mathcal{K}$, т.к. иначе K – ПИ для f, K импликанта ЭК из $\mathfrak{A}$ $\} K \in \mathfrak{A}$?! 2) в $\mathcal{K}$ нет ЭК ранга n, т.к. $\exists \alpha : f(\alpha) = 1$ и $\exists K : K(\alpha) = 1$? $K \to x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$

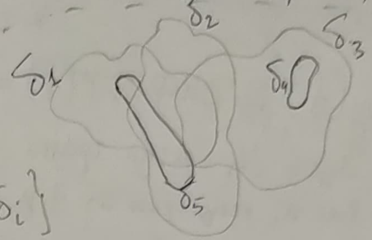
Пусть $K \in \mathcal{K}$ – макс. по рангу. $R(K) < n \Rightarrow \exists i : x_i, \overline{x}_i \notin \{K\}$. $\Rightarrow x_i K, \overline{x}_i K \notin \mathcal{K} \Rightarrow \exists K', K''$: $\{K\} \in \{K'\}$, $\{K\} \subseteq \{K''\}$ и $x_i K', \overline{x}_i K'' \in \mathfrak{A}$. Но тогда в $\mathfrak{A}$ входит $K' \cdot K''$ (т.к. она без строгих расширений), но $\{K\} \subseteq \{K' \cdot K''\}$, т.е. K – импликанта ЭК из $\mathfrak{A}$?! ▷

I. Минимизация ДНФ и связанные с ней задачи

Определение: ДНФ $\mathfrak{A} = K_1 \vee \ldots \vee K_s$ наз-ся тупиковой ДНФ, если $\forall$ ДНФ $\mathfrak{A}'$, полученной из $\mathfrak{A}$ удалением ЭК или букв ЭК $\mathfrak{A}' \neq \mathfrak{A}$.
Т.е. если $\mathfrak{A}$ реализует f, то $\forall\, \mathfrak{A}'$ не реализуют f

1) В тупиковую ДНФ входят только простые импликанты (макс. грани)

2) $\{N_{K_1}, \ldots N_{K_s}\}$ - тупиковое покрытие N_f (макс. гранями!)



$\Delta_1 = (\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4, \delta_5)$ (упорядоченное) - покрытие $\bigcup_{i=1}^{5} \delta_i = \delta$

$\delta_4 \subset \delta_3 \Rightarrow \Delta_1$ не неприводимое $\qquad \Delta = \{\delta_i\}$

$\Delta_2 = (\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_5)$ - покрытие δ

$\delta_5 \subset \delta_1 \cup \delta_2 \cup \delta_3 \Rightarrow \Delta_2$ не тупиковое

Неприводимое покр-е: $\nexists\, i, j : \delta_i \subset \delta_j$

Тупиковое покр-е: $\exists\, i : \delta_i \subset \bigcup_{j \neq i} \delta_j$

Неприводимость - нельзя вычеркивать буквы
Тупиковость - нельзя выкидывать ЭК

3) Тупиковая ДНФ получается из сокр. ДНФ вычеркиванием некоторых ПИ.

Определение: ДНФ $\mathfrak{A}^*$ - минимальная (кратчайшая) для $f \in P_2(n)$ если $R(\mathfrak{A}^*) = \min\limits_{\mathfrak{A}\ \text{реал.}\ f} R(\mathfrak{A})$ $\left(\lambda(\mathfrak{A}^*) = \min\limits_{\mathfrak{A}\ \text{реал.}\ f} \lambda(\mathfrak{A}) \right)$.

1) $\forall$ минимальная ДНФ - тупиковая
2) Среди кратчайших есть хотя бы одна тупиковая.
Пусть $\mathfrak{A}$ - кратч., но не тупиковая $\Rightarrow$ можно вычеркнуть букву.
$\mathfrak{A}'$ - вновь кратчайшая. Повторяем, пока можно. $\mathfrak{A}'''\ldots''$ - кратч. и тупик.

Определение: ДНФ $\cap$Т для ФАЛ f - это ДНФ, содержащая те и только те ПИ ФАЛ f, которые входят в $\forall$ тупик. ДНФ ФАЛ f.

Определение: ДНФ ΣТ для ФАЛ f - это ДНФ, содержащая те и только те ПИ ФАЛ f, которые входят хотя бы в одну тупиковую ДНФ ФАЛ f.

Пусть $f \in P_2(n)$, $\mathfrak{A}$ - её сокр. ДНФ: $\mathfrak{A} = K_1 \vee \ldots \vee K_s$.

Определение: точка $\alpha \in N_f$ наз-ся ядровой, если $\exists!\, i : \alpha \in N_{K_i}$.
Макс. грань N_{K_i} наз-ся ядровой, если она содержит ядровую т.
Ядро $Ker(f)$ - это мн-во всех ядровых граней
Ядровая ФАЛ - f такая, что $Ker(f) = $ Сокр. ДНФ(f)

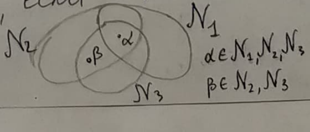
$\boxed{\text{Утверждение 3.1}}$ $Ker(f) = $ ДНФ $\cap$Т(f)

$Ker(f) \subset$ ДНФ$\cap$Т(f), т.к. если $K_i \in Ker(f)$, то $\exists\, \alpha \in N_{K_i}$, $\alpha \notin N_{K_j}$ при $j \neq i$, но α должна быть покрыта $\Rightarrow K_i \in \cap$Т.

ДНФ$\cap$Т$(f) \subset Ker(f)$, т.к если $K_i \notin Ker(f)$, то $\forall\, \alpha \in N_{K_i}\ \exists\, j_\alpha : N_{K_{j_\alpha}}^{*K_i} \ni \alpha$. Р-м
$T' = \bigvee\limits_{\alpha \in N_{K_i}} K_{j_\alpha}$. Дополним её до тупиковой ДНФ - получим T: $K_i \notin T$. (если нужно, приводя подобные)

Следствие: сокр. ДНФ(f) - единственная тупик. ДНФ $f \Leftrightarrow f$ - ядровая

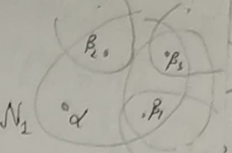
Пусть $f \in P_2(n)$ и $\gamma \in N_f$.
Пучок Π_γ макс. граней ФАЛ f - мн-во тех макс. граней f, которые содержат γ.
Точка $\alpha \in N_f$ наз-ся регулярной для f, если $\exists\, \beta \in N_f$: $\Pi_\beta(f) \subset \Pi_\alpha(f)$, $\Pi_\beta(f) \neq \Pi_\alpha(f)$. (т.е. $\alpha \neq \beta$)



Максимальная грань N_{K_i} наз-ся регулярной, если все её точки регулярные

Замечание: все неядровые точки ядровой грани – регулярные

(регулярность порядка 1, или простая регулярность)



$\Pi_\alpha = \{N_1\}$

$\Pi_{\beta_i} = \{N_1, \dots\}$

Утверждение 3.2. ПИ K входит в ДНФ $\Sigma T(f)$ $\Leftrightarrow$ K – не регулярная грань f

$Reg(f) \cap ДНФ\Sigma T(f) = \varnothing$:

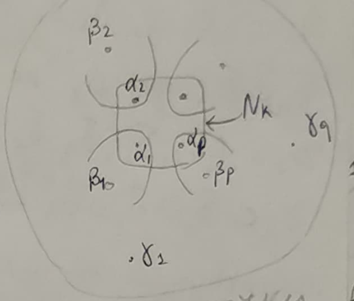
Пусть N_K - регул. грань, $N_K = \{\alpha_1, \dots \alpha_p\}$

Все α_i регулярны $\Rightarrow \exists \beta_i : \Pi_{\beta_i}(f) \subsetneq \Pi_{\alpha_i}(f)$

Можно считать, что β_i нерегулярны

(иначе заменим β_i на точку, обеспечивающую регулярность β_i)

Пусть $N_f \setminus N_K = \{\gamma_1, \dots \gamma_q\}$, Очев. $\{\gamma_1 \dots \gamma_q\} \supset \{\beta_1, \dots \beta_p\}$



Р-м тупиковую ДНФ T для ф-и f.

Мы должны покрыть все $\{\gamma_1, \dots \gamma_q\}$, но тогда мы покроем $\{\beta_1, \dots \beta_p\}$ и $\Rightarrow \{\alpha_1, \dots \alpha_p\} \Rightarrow$ $N_K \notin T$ (т.к. T тупиковая)

Покрыли все точки N_K гранями из пучков $\Pi_\beta(f)$. Теперь N_K включать нельзя в силу тупиковости

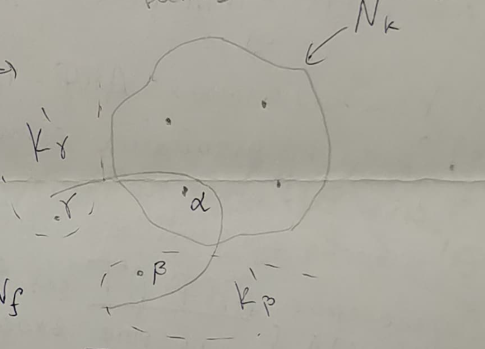
$K \notin Reg(f) \Rightarrow K \in ДНФ\Sigma T(f)$:

Пусть N_K - не регулярная грань. $\Rightarrow$

$\exists \alpha : \forall \beta \in N_f \setminus \{\alpha\}$ либо $\Pi_\beta = \Pi_\alpha$

либо $\Pi_\beta \supset \Pi_\alpha$

либо $\Pi_\beta \not\supseteq \Pi_\alpha$



Построим тупик. покрытие T точек N_f

Возьмём N_K в T.

Если α ядровая, то просто достроим T до тупик. покрытия

Иначе $\Pi_\alpha(f) = \{K, K_1, \dots K_t\}$. $\forall \beta \in K_i$, $i = \overline{1,t}$ $\exists K'_\beta \in \Pi_\beta(f)$: $\alpha \in K'_\beta$. Возьмём K'_β в покрытие.

Мы покрыли все точки из граней из $\Pi_\alpha(f)$.

Достроим покрытие до тупикового

T - тупиковое $\Rightarrow K \in ДНФ\Sigma T(f)$

4

Хотим минимизировать ДНФ $f \in P_2(n)$.

Определим окр-ть порядка $r \in \mathbb{N}_0$ по индукции

Пусть N_K - макс. грань f.

$$S_r(N_K, f) = \begin{cases} \{N_K\}, & r = 0 \\ \text{мн-во тех макс. граней, которые имеют непуст. пересеч. с } S_{r-1}(N_K, f) \end{cases}$$

1) $K \in ДНФ\Pi T(f) \Leftrightarrow K$ - ядровая $\Leftrightarrow \exists \alpha \in N_K : \Pi_\alpha(f) = \{N_K\}$. Нужно знать окр-ть 1-го порядка

2) $K \in ДНФ\Sigma T(f) \Leftrightarrow K$ - не регулярная $\Leftrightarrow \exists \alpha \in N_K : \forall \beta \in N_f \setminus N_K$ $\Pi_\beta(f) \not\subset \Pi_\alpha(f)$. Нужно знать $S_2(N_K, f)$

1) Пусть $f \in P_2(n)$ и в N_f нет соседних по x_i, $i \in [1,n]$ наборов. Тогда в любую импликанту R ФАЛ f входит либо x_i, либо $\overline{x_i}$.

2) Пусть $f(x_1 \dots x_n) = x_i + g(x_1, \dots x_{i-1}, x_{i+1}, \dots x_n) \Leftrightarrow f$ линейна по x_i

$f(x_1 \dots x_n)$ - линейная $\Leftrightarrow f = \underbrace{x_{i_1} \oplus \dots \oplus x_{i_r}}_{\text{существ перем-е}} \oplus \alpha_0$

I. Минимизация ДНФ и связанные с ней задачи (4)

1) $f \in P_2(n)$, $i \in [1,n]$. f монотонна по x_i $\Leftrightarrow$ $\forall\, \alpha \le \beta$ - соседние по x_i $f(\alpha) \le f(\beta)$

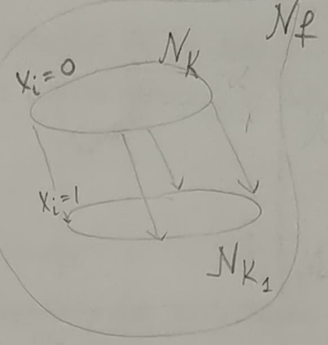
$\Rightarrow$ $\forall$ ПИ K ФАЛ f не содержит $\bar{x}_i$.

Пусть $K = \bar{x}_i K'$ - ПИ. Р-м $K_1 = x_i K'$.

$\forall\, \alpha \in N_K,\ \beta \in N_{K_1}$ $\alpha \le \beta$, но $K(\alpha) = 1 \Rightarrow f(\alpha) = 1$

$\Rightarrow f(\beta) = 1 \Rightarrow N_{K_1} \subset N_f \Rightarrow K'$ - импликанта,

но K - ПИ ?!



2) $f \in P_2(n)$ - монотонная $\Leftrightarrow$ $\forall\, \alpha \le \beta$ $f(\alpha) \le f(\beta)$

$\Leftrightarrow$ f монотонна по всем переменным.

$\Rightarrow$ $\forall$ ПИ K ФАЛ f — монотонная ЭК, т.е. $K = x_{i_1} \dots x_{i_r}$.

можно р-ть инмонотонность по x_i: $\forall\, \alpha \le \beta$ - соседние по x_i $f(\alpha) \ge f(\beta)$

т.е. ПИ не содержат x_i, а для инмонот. ФАЛ $K = \bar{x}_{i_1} \dots \bar{x}_{i_r}$

$K_{(101)} = x_1 \bar{x}_2 x_3$

$K^+_{(101)} = x_1 x_3$

Введём $K^+_\beta(x_1, \dots x_n) = \underset{\substack{1 \le i \le n \\ \beta_i = 1}}{\&} x_i$.

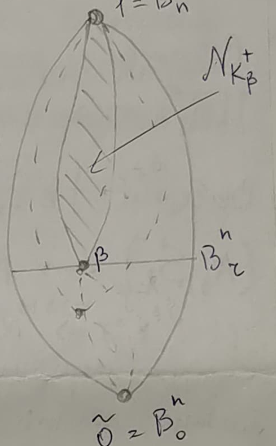
$N_{K^+_\beta}$ - грань ранга r, $r = \|\beta\|$. $N_{K^+_\beta} = \{\gamma : \gamma \ge \beta\}$

$N_{K_\beta} = \{\beta\}$, $N_{K^+_\beta}$ - грань ранга r

Если f - монотонная ФАЛ, то $\beta \in N_f \Leftrightarrow K^+_\beta$ - грань f (импликанта f)

K^+_β - простая импликанта $\Leftrightarrow$ β - нижняя единица,

т.е. $\forall\, \gamma : \gamma \ne \beta,\ \gamma \le \beta$ $f(\gamma) = 0$



Пусть N^+_f - мн-во нижних единиц.

Утверждение 4.1 Сокращённая ДНФ $\mathfrak{A}$ монотонной ФАЛ f, $f \in P_2(n)$, явл-ся единственной тупиковой ДНФ этой ФАЛ и имеет вид

$$\mathfrak{A}(x_1, \dots x_n) = \bigvee_{\beta \in N^+_f} K^+_\beta(x_1, \dots x_n).$$

При этом все наборы из N^+_f явл-ся ядровыми точками. Следствие: монотонная ФАЛ — ядровая

◁ Достаточно д-ть, что [K-ПИ f $\Leftrightarrow$ $K = K^+_\beta$ для некоторого $\beta \in N^+_f$] и $\forall \beta \in N^+_f$ явл-ся ядровой точкой грани $N_{K^+_\beta}$. Мы уже знаем, что $\forall$ ПИ монот. ФАЛ - монотонная ЭК. Т.е. $K = K^+_\beta$, $\beta \in N_f$. Но $\beta \in N^+_f$, т.к. если $\exists\, \gamma \le \beta, \gamma \ne \beta$. $f(\gamma) = 1$, то $\forall\, \alpha \ge \gamma$ $f(\alpha) = 1 \Rightarrow K^+_\gamma$ - импликанта, но K - ПИ ?!

И наоборот: K^+_β - импликанта f $\forall \beta \in N^+_f$ и $\nexists\, \gamma \le \beta, \gamma \ne \beta : [K^+_\gamma \to f] = 1$.

Если β не ядровая, то $\exists\, K^+_\gamma : \gamma \le \beta, \gamma \ne \beta$ и $[K^+_\gamma \to f] = 1$, но $\beta \in N^+_f$?! ▷

Задача о покрытии: $\exists\, N = \{\alpha_1, \dots \alpha_s\}$, $\mathfrak{N} = \{N_1, \dots N_p\}$ - покрытие N, т.е. $N_i \subseteq N$ и $\bigcup_{i=1}^{p} N_i = N$. Сопоставим $(N, \mathfrak{N}) \longleftrightarrow M \in B^{p,s}$: $M\langle i,j \rangle = 1 \Leftrightarrow \alpha_j \in N_i$

	α_1	...	α_j	...	α_s
N_1					
$\vdots$					
N_i			$M\langle i,j \rangle$		
$\vdots$					
N_p					

В M нет нулевых столбцов.

Строка M с № i покрывает столбец j $\Leftrightarrow$ $M\langle i,j \rangle = 1$

Система строк M с № из $I \subseteq [1,n]$ покрывает M $\Leftrightarrow$ $\forall$ столбец покр-ся хотя бы одной строкой с № из I. $\Leftrightarrow$ $\{N_i : i \in I\}$ - покрытие N, при этом покрытия считаются тупиковыми, если из них нельзя удалить ни одну строку (мн-во), сохраняя св-во покрытия.

Хотим найти все тупиковые подпокрытия N.

	α_1	α_j	α_s	
N_1				y_1
N_i		$M\langle i,j\rangle$		y_i
N_p				y_p

$\forall \beta \in B^p \Rightarrow I_\beta = \{ i \in [1,p] ; \beta_i = 1 \}$

$F(y_1, \dots y_p)$ – ФАЛ покрытия для M —

$\forall \beta \in B^p \; [F(\beta) \Leftrightarrow I_\beta \text{ - покрытие } M]$

Св-ва: 1) F - монотонная ФАЛ

2) $\beta \in N_F^+ \Leftrightarrow I_\beta$ - тупиковое покрытие

$\boxed{\text{Утверждение 4.2}}$ Функция покрытия $F(y_1, \dots y_p)$ матрицы $M \in B^{p,s}$ без нулевых столбцов задаётся КНФ вида

$$F(y_1, \dots y_p) = \bigwedge_{j=1}^{s} \Big(\bigvee_{\substack{i=1 \\ M\langle i,j\rangle = 1}}^{p} y_i \Big).$$

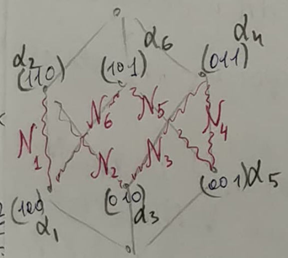
Следствие: раскрывая скобки и приводя подобные, получим сокр. ДНФ, ПИ которой соотв. тупиковым покрытиям матрицы M.

Выберем $f \in P_2(n)$: $N_f = \{\alpha_1, \dots \alpha_s\} = N$. $S_f = \{N_{K_1}, \dots N_{K_p}\} = \mathcal{N}$ – все макс. грани f

$(N_f, S_f) \longleftrightarrow M \in B^{p,s}$ – таблица Квайна ФАЛ f.

$M\langle i,j\rangle \Leftrightarrow \alpha_j \in N_{K_i}$. Матрица без нулевых столбцов, все строки которой попарно несравнимы как наборы из B^s (т.к. грани макс-ны). По M можно найти ядровые и регулярные точки и грани ФАЛ f и т.д.

Р-м $g \in P_2(3)$. $N_g = \{(100), (110), (010), (011), (001), (101)\}$ $\to N_1, N_2, N_3, N_4, N_5, N_6$



$\mathfrak{A}_{\text{сокр}}(g) = \underset{K_1}{x_1\bar{x}_3} \vee \underset{K_2}{x_2\bar{x}_3} \vee \underset{K_3}{\bar{x}_1 x_2} \vee \underset{K_4}{\bar{x}_1 x_3} \vee \underset{K_5}{\bar{x}_2 x_3} \vee \underset{K_6}{x_1\bar{x}_2}$

	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6	
N_1	1	1					y_1
N_2		1	1				y_2
N_3			1	1			y_3
N_4				1	1		y_4
N_5					1	1	y_5
N_6	1					1	y_6

$F(y_1, \dots y_6) = (y_1 \vee y_6)(y_1 \vee y_2) \dots (y_5 \vee y_6) =$

$y_1 y_3 y_5 \vee y_2 y_4 y_6 \vee y_1 y_2 y_4 y_5 \vee y_2 y_3 y_5 y_6 \vee$

$T_1 = K_1 \vee K_3 \vee K_5$ $\quad T_2 = K_2 \vee K_4 \vee K_6$ $\quad T_3 = K_1 \vee K_2 \vee K_4 \vee K_6$ $\quad T_4 = K_2 \vee K_3 \vee K_5 \vee K_6$

$y_3 y_4 y_6 y_1$ $\qquad T_1, \dots T_5$ - все тупиковые

$T_5 = K_3 \vee K_4 \vee K_6 \vee K_1$

ДНФ ФАЛ $g(x_1, x_2, x_3)$

$N_f = \{\underbrace{\alpha_1, \dots \alpha_t}_{N \text{ - не ядровые не регулярные}}, \alpha_{t+1}, \dots \alpha_s\}$. $S_f = \{N_{K_1}, \dots N_{K_q},$

ядровые – $N_{K_{q+1}} \dots N_{K_m}$,

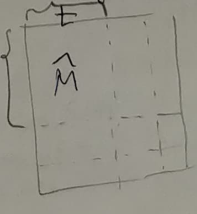
регулярные – $N_{K_{m+1}}, \dots N_{K_p}\}$

Можем рассм-ть $\mathcal{N} = \{N_1, \dots N_q\}$, где $N_i = N_{K_i} \cap N$

$(N, \mathcal{N}) \leftrightarrow \hat{M}$ редуцированная таблица Квайна

Ищем $\hat{F}$ – ФАЛ покрытия $\hat{M}$, затем сокр. ДНФ $\hat{F}$. Далее

ЭК $[y_{i_1} \dots y_{i_r}] \to K_{i_1} \vee \dots \vee K_{i_r} \vee K_{q+1} \vee \dots \vee K_m$ – тупиковая ДНФ f.



I. Минимизация ДНФ и связанные с ней задачи.

<u>Градиентный алгоритм</u> строит покрытие матрицы M, $M \in B^{p,s}$ (без 0 столбц) выбирая на каждом шаге строку, покрывающую наибольшее число ещё непокрытых столбцов.

Утверждение 5.1 Пусть $\gamma \in (0,1]$ и в $\forall$ столбце M не меньше, чем $p \cdot \gamma$ единиц. Тогда град. покрытие M будет иметь длину не больше
$$\left\lceil \frac{1}{\gamma} \ln^+(\gamma s) \right\rceil + \frac{1}{\gamma}, \text{ где } \ln^+(x) = \begin{cases} \ln x, & x \geq 1 \\ 0, & x \in (0,1) \end{cases}$$

◁ Пусть p_t, s_t - число строк / столбцов на шаге $t = 0, 1, \ldots$ $p_0 = p$, $s_0 = s$, $p_t = p_0 - t$, $s_t = \delta_t \cdot s$, где $\delta_t \in [0,1]$. Рассмотрим на каждом шаге матрицу $M_t \in B^{p_t, s_t}$, которая получается из M выбрасыванием строк, выбранных ГА, и покрытых или столбцов. Заметим, что число единиц в M_t не меньше чем $\gamma \cdot p \cdot s_t$, т.к. изначально в каждом столбце не менее γp единиц, и у оставшихся столбцов сохранились все единицы (иначе они были бы покрыты). В среднем в каждой строке M_t не менее $\gamma p s_t / (p-t) \geq \gamma \delta_t$ единиц. Но ГА выбирает строку с наиб. числом "1", которое точно $\geq$ среднего $\geq \gamma s_t$.

Значит $s_t - s_{t+1} \geq \gamma s_t$ или $s_{t+1} = \delta_{t+1} s \leq (1-\gamma)\delta_t \cdot s \Rightarrow$

$\delta_{t+1} \leq (1-\gamma)\delta_t$. Т.к. $\delta_0 = 1$, $\delta_t \leq (1-\gamma)^t \leq e^{-\gamma t}$.

Далее, пусть мы сделали t шагов, и непокрытыми осталось не более чем $s_t = \delta_t s \leq e^{-\gamma t} s$ столбцов, то, покрыв каждый из оставшихся столбцов одной строкой, мы получим покрытие длины $\leq t + \delta_t s$.

Хотим $t + \delta_t s \longrightarrow \min$. Положив $t = \left\lceil \frac{1}{\gamma} \ln^+(\gamma s) \right\rceil$, получим
$$t + \delta_t s \leq t + e^{-\gamma t} s \leq \left\lceil \frac{1}{\gamma} \ln^+(\gamma s) \right\rceil + e^{-\ln^+(\gamma s)} \cdot s \leq \left\lceil \frac{1}{\gamma} \ln^+(\gamma s) \right\rceil + \frac{1}{\gamma}. \quad ▷$$

Пусть $\mathcal{J}$ - некоторое мн-во граней в B^n. Мн-во A, $A \subseteq B^n$ - <u>протык-е мн-во</u> для $\mathcal{J} \Leftrightarrow \forall \Gamma \in \mathcal{J} \; \exists \alpha \in A : \alpha \in \Gamma$.

Утверждение 5.2 (Лемма о протыкающих наборах) Для $\forall m \leq n, \in \mathbb{N}$ в B^n $\exists$ мн-во $A \subseteq B^n$, которое протыкает все грани ранга m в B^n, и $|A| \leq n \cdot 2^m$.

◁ Рассмотрим матрицу $M \in B^{p = 2^n,\; C_n^m \cdot 2^m = s}$, $\forall$ строка которой соотв набору из B^n, а столбец - грани ранга m в B^n, причем на пересечении строки, соотв $\alpha \in B^n$ и столбца, соотв. грани Γ, стоит "1" $\Leftrightarrow \alpha \in \Gamma$. Покрытие матрицы M строками, соотв-ми наборам $\alpha \in A \subseteq B^n$, задает искомое протык. мн. A.

В каждом столбце M ровно 2^{n-m} единиц $\Rightarrow \gamma = \frac{1}{2^m}$. Значит, $\exists$ град. покрытие (и соответственно протык. мн-во) A:
$$|A| \leq \left\lceil 2^m \ln^+(C_n^m) \right\rceil + 2^m \leq n \cdot 2^m, \text{ т.к. } \ln(C_n^m) \leq \ln 2^n = n \ln 2 \leq n-1 \text{ при } n \geq 2 \quad ▷$$

ГА и ДНФ: $f \in P_2(n) \rightarrow$ табл. Квайна $\widehat{M} \rightarrow$ редуц. табл. Квайна $\widehat{M}$

$\widehat{M} = \boxed{M' \mid M''}$ в M' много единиц, в M'' - мало

для M' - град. алгоритм

для M'' - переборный (даже для $\widehat{M''}$ - то, что не покрылось после ГА)

Задача минимизации ДНФ. Поведение ф-и Шеннона и оценки типичных значений для ранга и длины ДНФ. 6

Пусть ψ - функционал сложности (ДНФ, СФЭ, КС, ...)

т.е. $\forall$ ДНФ $\mathfrak{A} \to \psi(\mathfrak{A})$: $\psi(\mathfrak{A}) \geq 0$ и

$\forall$ ДНФ $\mathfrak{A}'$, полученной из $\mathfrak{A}$ удалением букв или ЭК $\psi(\mathfrak{A}') \leq \psi(\mathfrak{A})$

монотонность и неотрицательность

$R(\mathfrak{A})$ - ранг ДНФ, $\lambda(\mathfrak{A})$ - длина ДНФ, $L_{\neg}(\mathfrak{A})$ - # букв с отрицанием.

$\forall f \in P_2(n)$: $\psi(f) = \min\limits_{\mathfrak{A}, \text{реал. } f} \psi(\mathfrak{A})$. $\psi(f)$ - ψ-сложность f,

$\mathfrak{A}^*$ - ψ-оптимальная ДНФ

Пси-оптимальную ДНФ всегда можно найти среди тупиковых ДНФ в силу св-ва монотонности.

R-оптимальная ДНФ - минимальная (обяз. тупиковая)

λ-оптимальная ДНФ - кратчайшая (всегда есть среди тупиковых)

Задача минимиз. ДНФ: по данной ФАЛ f и функ-лу ψ найти ψ-оптимальную ДНФ, реализ. f. Вообще говоря, перебором.

Можно перебирать только тупиковые

$$f \Rightarrow \text{Сокр. ДНФ} \Rightarrow \text{ДНФ Квайна} \Rightarrow \text{ДНФ } \Sigma T \to \left.\begin{matrix}\mathfrak{A}_1\\ \vdots \\ \mathfrak{A}_m\end{matrix}\right\}$$

Все тупик. ДНФ ФАЛ f

ищем ψ-оптимальные

Функция Шеннона для ψ-сложности ДНФ - $\psi(n) = \max\limits_{f \in P_2(n)} \psi(f)$ ч.1 в. 1.1

$\boxed{\text{Утверждение 6.1}}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $\lambda(n) = 2^{n-1}$, $R(n) = 2^{n-1} \cdot n$.

$\triangleleft$ Нижняя оценка. Р-м $l_n = x_1 \oplus \ldots \oplus x_n$. У неё есть единств. ДНФ, $\Rightarrow$ $R(l_n) = n \cdot 2^{n-1}$, $\lambda(l_n) = 2^{n-1}$. $\Rightarrow$ $R(n) \geq n \cdot 2^{n-1}$, $\lambda(n) \geq 2^{n-1}$

Верхняя оценка. $\forall f \in P_2(n)$ $\exists$ ДНФ $\mathfrak{A}$, реализ-щая f и такая, что $\lambda(\mathfrak{A}) \leq 2^{n-1}$ (отсюда $R(\mathfrak{A}) \leq n \cdot 2^{n-1}$). Разложение Шеннона:

$$f(x_1, \ldots, x_n, b'') = \bigvee_{b'' \in B^{n-q}} K_{b''}(x'') \cdot f_{b''}(x')$$

$$f(\underbrace{x_1, \ldots x_q}_{x'}, \underbrace{x_{q+1}, \ldots x_n}_{x''}) = \bigvee_{b'' \in B^{n-q}} K_{b''}(x_{q+1}, \ldots x_n) \cdot f(x_1, \ldots x_q, b'')$$

Пусть $q = 1$. $f(x_1, \ldots x_n) = \bigvee\limits_{b'' = (b_2 \ldots b_n) \in B^{n-1}} x_2^{b_2} \ldots x_n^{b_n} \cdot f_{b''}(x_1)$.

$$f_{b''}(x_1) = \begin{cases} \left.\begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix}\right\} \text{ЭК ранга } n-1 \\ \left.\begin{matrix} x_1 \\ \overline{x}_1 \end{matrix}\right\} \text{ЭК ранга } n \end{cases}$$

$\hat{\mathfrak{A}}_f$: $\lambda(\hat{\mathfrak{A}}_f) \leq 2^{n-1} \Rightarrow \lambda(n) \leq 2^{n-1}$, $R(n) \leq 2^{n-1} \cdot n$ $\triangleright$

Пусть $\xi = (\xi_1, \ldots \xi_k)$ - случ. вектор из k незав. случ. величин ξ_i, $\xi_i = \begin{cases} 1, & \frac{1}{2} \\ 0, & \frac{1}{2} \end{cases}$

$\forall A \subseteq B^n$ $P(\xi \in A) = |A| \cdot 2^{-n}$. Если $\Theta = \xi_1 + \ldots + \xi_k$, то $\mathbb{E}\Theta = \frac{k}{2}$, $\mathbb{D}\Theta = \frac{k}{4}$

$P(|\Theta - \mathbb{E}\Theta| > t) \leq \frac{\mathbb{D}\Theta}{t^2}$. Если $t = m\sqrt{k}$, $m = m(k)$, то $P(|\Theta - \mathbb{E}\Theta| > m\sqrt{k}) \leq \frac{1}{4m^2} \xrightarrow[m \to \infty]{} 0$

$\boxed{\text{Утверждение 6.2}}$ Для почти всех ФАЛ $f \in P_2(n)$ $\lambda(f) \leq \frac{3}{4} 2^{n-1}\left(1 + O\left(\frac{n}{2^{n/2}}\right)\right)$

$R(f) \leq \frac{3}{4} n 2^{n-1}\left(1 + O\left(\frac{n}{2^{n/2}}\right)\right)$

$\triangleleft$ Достаточно д-ть, что доля ФАЛ: $\lambda(\hat{\mathfrak{A}}_f) > \frac{3}{4} 2^{n-1} + m 2^{n/2} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$, где $m = m(n) = n$. $P_2(n) \longleftrightarrow B^{2^n}$. $\xi = (\xi_{(0 \ldots 0)}, \ldots \xi_{(1 \ldots 1)})$. $\forall b'' \in B^{n-1}$ $\eta_{b''} = \xi_{(0, b'')} \vee \xi_{(1, b'')} = 0 \Leftrightarrow f_{b''}(x_1) \equiv 0$

$\mathbb{E}\eta_{b''} = \frac{3}{4}$, $\mathbb{D}\eta_{b''} = \frac{3}{16}$. $\Lambda = \sum \eta_{b''}$. $\mathbb{E}\Lambda = \frac{3}{4} 2^{n-1}$, $\mathbb{D}\Lambda = \frac{3}{16} 2^{n-1}$. Пусть $t = n \cdot 2^{n/2}$. Тогда $P(|\Lambda - \mathbb{E}\Lambda| > t) \leq \frac{\mathbb{D}\Lambda}{t^2} = \frac{3}{16 n^2} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$, т.е. $P(\Lambda \leq \frac{3}{4} 2^{n-1} + n 2^{n/2}) \xrightarrow[n \to \infty]{} 1$

т.е. $P(\lambda(f) \leq \frac{3}{4} 2^{n-1} + n 2^{n/2}) \xrightarrow[n \to \infty]{} 1$. $\triangleright$

... в путях от листа к корню

I. Минимизация ДНФ и связанные с ней задачи (7)

Задача: по ФАЛ f и функ-лу сложности ψ найти ψ-оптимальную ДНФ, реализующей f

$f \Rightarrow$ сокр. ДНФ $\Rightarrow$ ДНФ Квайна $\Rightarrow \underbrace{\text{ДНФ}\Sigma\text{Т}}_{\text{Окр-ть порядка 2}}$ $\to \mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_q$ — среди тупиковых есть ψ-оптимальная

$\lambda_{\text{сокр}}(f)$ – длина сокр. ДНФ f
$\tau(f)$ – число тупиковых ДНФ f
$\mu(f)$ – число минимальных ДНФ f
— параметры трудоёмкости — не функ-лы, т.к. не монотонны

$\lambda_{\text{сокр}}(n) = \max\limits_{P_2(n)} \lambda(f)$, $\tau(n) = \max\limits_{P_2(n)} \tau(f)$, $\mu(n) = \max\limits_{P_2(n)} \mu(f)$

Утверждение 7.1 Число тупиковых (минимальных) ДНФ у ФАЛ $f \in P_2(n)$, $n \geq 4$, вида $f(x_1, \ldots x_n) = g(x_1, x_2, x_3) \cdot (x_4 \oplus \ldots \oplus x_n)$ где $N_g = \{(000), (111)\}$, равно $5^{2^{n-4}}$ (соответственно $2^{2^{n-4}}$).

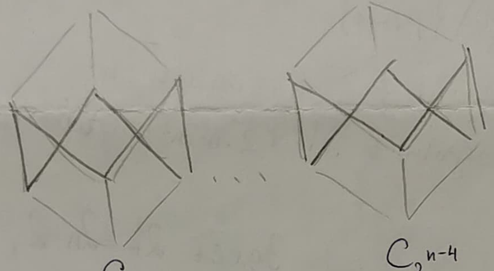
Следствие: $\tau(n) \geq 5^{2^{n-4}}$, $\mu(n) \geq 2^{2^{n-4}}$

◁ У $g(x_1, x_2, x_3)$ 5 тупиковых и 2 миним. ДНФ. Сокр. ДНФ f: $\mathfrak{A} = \bigvee\limits_{(\sigma_4, \ldots \sigma_n) \in B^{n-3}_{\text{нечёт}}} x_4^{\sigma_4} \ldots x_n^{\sigma_n} \cdot \left(\bigvee\limits_{i=1}^{6} K_i\right) =$

Сокр. ДНФ $g = K_1 \vee \ldots \vee K_3$.

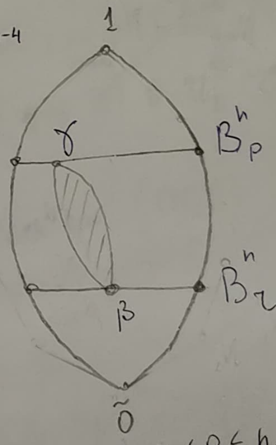
$\bigvee\limits_{i=1}^{6} \bigvee\limits_{(\sigma_4, \ldots \sigma_n) \in B^{n-3}_{\text{нечёт}}} x_4^{\sigma_4} \ldots x_n^{\sigma_n} \cdot K_i$

независимые циклы



C_1 ... $C_{2^{n-4}}$

Можем в каждом из циклов выбрать тупиковую (минимальную) $\Rightarrow \tau(f) = 5^{2^{n-4}}$, $\mu(f) = 2^{2^{n-4}}$ ▷



$0 \leq r \leq p \leq n$

Утверждение 7.2 $\lambda_{\text{сокр}}(n) \geq C_1 \dfrac{3^n}{n}$.

$f \in P_2(n)$ – симметричная ФАЛ $\Leftrightarrow f(\beta) = f(\gamma)$, если $\|\beta\| = \|\gamma\|$ (на самом деле перестановкой БП, но это $\Leftrightarrow$)

Т.е. $N_f = B^n_{i_1} \cup B^n_{i_2} \cup \ldots \cup B^n_{i_s}$, где $0 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_s \leq n$. Пишут $f = S_n^{\{i_1, \ldots i_s\}}$.

$g(x_1, x_2, x_3) = S_3^{\{1,2\}}$, $H(x_1, x_2, x_3) = S_3^{\{2,3\}}$, $\ell_n(\tilde{x}) = S_n^{\{1,3,5\ldots\}}$.

Рассмотрим $S_n^{[r,p]}$ (поясковую функцию). $\forall$ макс. грань $\longleftrightarrow (\beta, \gamma)$: $\beta \in B^n_r$, $\gamma \in B^n_p$ и $\beta \leq \gamma$. Сокр. ДНФ $(S_n^{[r,p]}) = \bigvee\limits_{\substack{1 \leq i_1 < \ldots < i_{n-p+r} \leq n \\ (\sigma_1, \ldots \sigma_{n-p+r}) \in B_r^{n-p+r}}} x_{i_1}^{\sigma_1} \ldots x_{i_{n-p+r}}^{\sigma_{n-p+r}} = \mathfrak{A}$.

β отлич. от γ в $p-r$ разрядов.
общих для β, γ = $n-p+r$

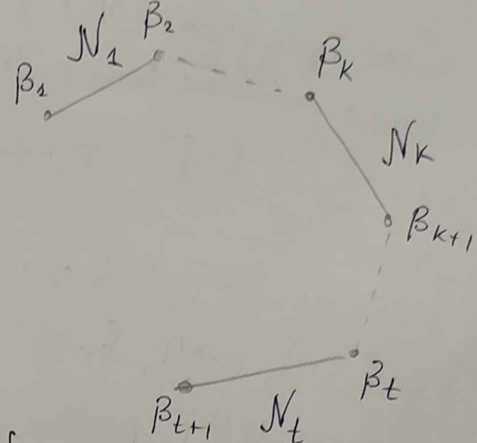
$\lambda(\mathfrak{A}) = C_n^{n-p+r} \cdot C^r_{n-p+r} = \dfrac{n!}{r!(p-r)!(n-p)!}$. Положим $r = n-p = \lceil n/3 \rceil$, $p-r = n - 2\lceil n/3 \rceil$. $= \left\{\begin{array}{l} \exists\, n = 3t \\ r = p-r = n-p = t \end{array}\right\} = \dfrac{(3t)!}{(t!)^3} \sim \dfrac{\sqrt{2\pi 3t}\left(\frac{3t}{e}\right)^{3t}}{\left(\sqrt{2\pi t}\right)^3 \left(\frac{t}{e}\right)^{3t}} = \dfrac{1}{2\pi} \dfrac{3^{3t}}{t} = \dfrac{3}{2\pi} \cdot \dfrac{3^n}{n}$

$\boxed{\text{Утверждение 7.3}}$ (Теорема Журавлёва)

При любом $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, в $P_2(n)$ существуют функции f', f'', имеющие общую простую импликанту K, которая входит в ДНФ Σmin одной из них и не входит в ДНФ Σmin другой, причём

$$S_{n-3}(N_K, f') = S_{n-3}(N_K, f'').$$

$f \in P_2(n)$ – цепная ф-я длины $t \Leftrightarrow$ Сокр. ДНФ геометрически есть цепь из t рёбер куба B^n.



$N_f = \{\beta_1, \ldots \beta_{t+1}\}$, $N_i = \{\beta_i, \beta_{i+1}\}$

$\mathfrak{A}_{сокр}(f) = K_1 \vee \ldots \vee K_t$.

При $t = 2k-1$, $t \geq 5$ f имеет единственную минимальную ДНФ

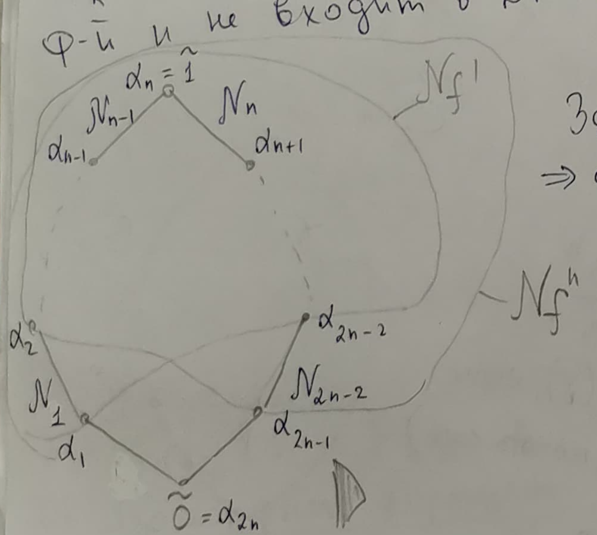
$\mathcal{M} = K_1 \vee K_3 \vee \ldots \vee K_t$

◁ Построим в B^n цепную ФАЛ f длины $2k$.

f': $N_{f'} = N_f \setminus \{\beta_1\}$

f'': $N_{f''} = N_f \setminus \{\beta_{2k+1}\}$

N_K входит в ДНФ Σmin одной из ф-й и не входит в ДНФ Σmin другой.



Здесь $2k = 2n-2$,

$\Rightarrow$ окр-ти порядка $(n-3)$ N_{n-1} функций f', f'' совпадают.

▷

т.е. соотв-й окрестн-ю

Замечание 1: из теоремы следует, что $\nexists$ локального критерия вхождения ЭК в ДНФ Σmin.

Замечание 2: При $n \geq 14$ в $P_2(n)$ имеется цепная ФАЛ чётной длины t, $t \geq 2^{n-11} - 4$, на основании которой можно установить справедливость теоремы для окрестности порядка $\left(\frac{t}{2} - 2\right)$. И даже есть пример длины $\sim \frac{1}{3} 2^n$